

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

WiSe 2021/2022

Bernold Fiedler, Isabelle Schneider

<http://dynamics.mi.fu-berlin.de/lectures/>

Abgabe: Mittwoch, 03.11.2021, 17 Uhr

Aufgabe 1: Bei einem Schachturnier treten je zwei Teilnehmer genau einmal gegeneinander an und ermitteln einen Sieger (Remis kommt nicht vor). Zeige (durch vollständige Induktion), dass die endlich vielen Teilnehmer so aufgereiht werden können, dass jeder über seinen unmittelbaren Nachfolger gesiegt hat.

Freiwilliger Zusatz: Ist die Reihenfolge eindeutig? Stellt sie eine „faire“ Rangordnung dar?

Aufgabe 2: Annaliese lernt fleißig die Bruchrechnung. Sie schreibt die Brüche

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1+1}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}, \quad \dots$$

in gekürzter Form und fragt sich, ob es eine Regel gibt, wie sich die Folge $\frac{p_n}{q_n}$ dieser (gekürzten) Brüche fortsetzt. Kannst Du ihr helfen?

Freiwilliger Zusatz: Sei $k \in \mathbb{N}$. Ist es möglich, eine entsprechende Regel auch für die (gekürzten) Brüche $\frac{p_n}{q_n}$ der Form

$$\frac{1}{k}, \quad \frac{1}{k+\frac{1}{k}}, \quad \frac{1}{k+\frac{1}{k+\frac{1}{k}}}, \quad \frac{1}{k+\frac{1}{k+\frac{1}{k+\frac{1}{k}}}}, \quad \dots$$

aufzuschreiben?

Aufgabe 3: Beweise, dass für alle $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt:

(i)
$$1 + \frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q^{N-1}} = \frac{q^N - 1}{q^N - q^{N-1}},$$

(ii)
$$\sum_{n=1}^N (-1)^n \cdot n \cdot \binom{N}{n} = 0.$$

Aufgabe 4: Betrachte das „Pascalsche“ Dreieck

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 & & & & 2 & & & 1 \\ & & & & & & & & & 1 & & & 3 & & & 3 & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 & & 4 & & & 6 & & & 4 & & & 1 \\ & \vdots \end{array}$$

Färbe Felder mit geraden Zahlen grün und solche mit ungeraden Zahlen schwarz. Beschreibe das entstehende „selbstähnliche“ Muster für große Dreiecke in möglichst klaren Worten (Computerplots sind erlaubt aber nicht verlangt).